**§ 3. Интеграл и преобразование Фурье**

**п. 1. Интеграл Фурье**

**Определение.** Функция  называется абсолютно интегрируемой на **R**, если сходится несобственный интеграл , т. е. если

, (1)

где *М* – некоторое число.

Пусть – непериодическая функция, абсолютно интегрируемая для всех  и удовлетворяющая на любом отрезке  условиям теоремы Дирихле. Следовательно, на  эту функцию можно разложить в ряд Фурье:

, (2)

где

. (3)

Подставим в ряд (2)  из (3):



. (4)

Обозначим частоту . Тогда из (4) имеем:

. (5)

Рассмотрим разность частот . Тогда из равенства (5) получим:

. (6)

Первое слагаемое в правой части равенства (6) при  стремится к нулю, так как

.

Второе слагаемое в правой части равенства (6) является интегральной суммой для функции

, для .

Таким образом при  (что равносильно ), из равенства (6) получим



или

. (7)

Таким образом, если функция – абсолютно интегрируемая для всех  и удовлетворяет на любом отрезке  условиям теоремы Дирихле, то для неё справедлива формула (7). В частности, если  непрерывна в точке , то

. (8)

Формула (7), (8) называется *формулой Фурье*, а интеграл в правой части этой формулы – интегралом Фурье функции .

**Пример.** Представить интегралом Фурье функцию 

***Решение.*** ▲ Функция  удовлетворяет всем условиям представимости интегралом Фурье. Она является абсолютно интегрируемой на :

.

Применим формулу (8):



Вычислим внутренний интеграл:











.

Отсюда



.

Следовательно,

.

Таким образом

.

При  имеем: , и значит

. ▲

**п. 2. Синус- и косинус-преобразование Фурье**

Преобразуем формулу (7) следующим образом:



.

Введем обозначения:

. (9)

Тогда получим

. (10)

Если  – четная функция, то формула Фурье (10) принимает вид

, где . (11)

Если же  – нечетная функция, то формула Фурье (10) примет вид

, где . (12)

Введем следующие обозначения:

. (13)

Тогда формулы (11) и (12) примут вид

, (14)

и

. (15)

Функции  и  из (13) называются *косинус-преобразованием* и *синус-преобразованием* *Фурье* функции .

**Пример.** Найти косинус-преобразование Фурье четной функции  и представить функцию интегральной формулой Фурье.

***Решение.*** ▲ Функция является абсолютно интегрируемой и удовлетворяет условиям теоремы Дирихле. Воспользуемся формулой (14): . Найдем косинус преобразование Фурье  по формуле (13):



.

Тогда

. ▲